10.2. A GYÖKVONÁS

Racionális számok, irracionális számok – megoldások

2092 *a)* $2{,}625$; *b)* $2{,}3125$; *c)* $4{,}8\dot{3}$;
d) $0{,}58\dot{3}$; *e)* $0{,}\dot{4}\dot{5}$; *f)* $1{,}\dot{4}2857\dot{1}$;
g) $1{,}\dot{5}3846\dot{1}$; *h)* $0{,}\dot{2}94117647058823\dot{5}$.

2093 *a)* $\frac{191}{250}$; *b)* $\frac{21\,973}{10\,000}$; *c)* $\frac{23}{9}$;
d) $\frac{413}{99}$; *e)* $\frac{764}{999}$; *f)* $\frac{172}{225}$;
g) $\frac{757}{990}$; *h)* $\frac{31\,531}{9\,999}$; *i)* $6=\frac{6}{1}$.

2094 Mindegyik bizonyítás indirekt úton történhet.

2095 *a)* A derékszögű háromszög átfogója 2, befogói 1 és $\sqrt{3}$.
b) A derékszögű háromszög befogói 1 és 2, átfogója $\sqrt{5}$.
c) A derékszögű háromszög átfogója 4, az egyik befogója 1, a másik $\sqrt{15}$.
d) A derékszögű háromszög átfogója 5, az egyik befogója 1, a másik $\sqrt{24}$.
e) A derékszögű háromszög befogói 3 és $\sqrt{2}$, átfogója $\sqrt{11}$, ebből 2-t elveszünk.
f) 3-ból elvesszük az *a)* részben szerkesztett $\sqrt{3}$-t.
g) A derékszögű háromszög befogói 2 és $\sqrt{3}$, átfogója $\sqrt{7}$, ezt megfelezzük és elvesszük a 2-ből.
h) A derékszögű háromszög átfogója 8, az egyik befogója 2, a másik $\sqrt{60}$.
i) A derékszögű háromszög befogói 44 és $\sqrt{73}$ (egy másik derékszögű háromszögből szerkeszthető, melynek befogói 8 és 3), az átfogó $\sqrt{2009}$.

2096 *a)* Például: 1,23112311123111123…; 1,23223222322223…; 1,21213213321333…
b) Például: 11,123112311123…; 12,212112111211112…; 13,1331333133331…
c) Például: 31,21221222122221…; 32,213211321113…; 33,3133133313331…

2097 *a)* $\frac{41}{16}=2{,}5625$; a 2009-dik jegy 0. *b)* $\frac{11}{3}=3{,}\dot{6}$; a 2009-dik jegy 6.
c) $\frac{13}{6}=2{,}1\dot{6}$; a 2009-dik jegy 6. *d)* $\frac{5}{9}=0{,}\dot{5}$; a 2009-dik jegy 5.
e) $\frac{25}{7}=3{,}\dot{5}7142\dot{8}$; 6 jegy ismétlődik, mivel $2009 = 334\cdot 6+5$, a keresett jegy 2.
f) $\frac{12}{17}=0{,}\dot{7}05882352941176\dot{4}$; 16 jegy ismétlődik, mivel $2009 = 125\cdot 16+9$, a keresett jegy 2.

2098 Racionális például: 5,991; 5,992; 5,993.
Irracionális például: 5,9912112111211112…; 5,99232232223…; 5,99565565556…

2099 *a)* Igaz.
b) Hamis, például $(1+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=4$.
c) Igaz.
d) Igaz, például $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}=2$.
e) Hamis, például $(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)=1$.
f) Igaz, lásd az előző példát.
g) Igaz.
h) Hamis, minden racionális szám reciproka racionális.
i) Hamis.

A négyzetgyökvonás azonosságai, alkalmazásaik – megoldások

2100 *a)* $x\geq\frac{1}{2}$; *b)* $x\geq 0$; *c)* $x\leq 0$;
d) $x\leq\frac{3}{2}$; *e)* $x\in\mathbb{R}$; *f)* $\{\}$;
g) $x<-3$ vagy $x\geq\frac{1}{5}$; *h)* $x\geq\frac{1}{5}$; *i)* $x\geq 2$;
j) $x\leq -3$ vagy $2\leq x$; *k)* $x\leq -1$ vagy $x\geq 1$.

2101 *a)* 6; *b)* 3; *c)* 14;
d) 2; *e)* 5; *f)* 15;
g) 3; *h)* 15; *i)* 3;
j) 25; *k)* 16; *l)* $\frac{1}{7}$;
m) 2401; *n)* 121; *o)* 9;
p) 2; *q)* 12.

2102 *a)* $\sqrt{50}>\sqrt{45}$; *b)* $\sqrt{77}<\sqrt{78}$; *c)* $\sqrt{20}=\sqrt{20}$;
d) $\sqrt{20}<\sqrt{21}$; *e)* $\sqrt{13}<\sqrt{14}$; *f)* $\sqrt{30}=\sqrt{30}$;
g) $\sqrt{23}<\sqrt{24}$; *h)* $\sqrt{27}<\sqrt{30}$; *i)* $\sqrt{\frac{1}{10}}>\frac{1}{5}$.

2103 *a)* $24+11\cdot\sqrt{6}$; *b)* $5\cdot\sqrt{2}+1$; *c)* 1;
d) 12; *e)* 14; *f)* 4;
g) $34-24\cdot\sqrt{2}$; *h)* $48+24\cdot\sqrt{3}$; *i)* $45-20\cdot\sqrt{5}$;
j) $19+4\cdot\sqrt{21}$.

2104 *a)* 2; *b)* 5; *c)* 5;
d) 4; *e)* 5; *f)* 6;
g) 30; *h)* 2; *i)* 56;
j) $2\cdot\sqrt{89}-18$; *k)* $2\cdot\sqrt{41}-12$.



2105 *a)* $\sqrt{75} > \sqrt{72}$; *b)* $\sqrt{108} > \sqrt{98}$; *c)* $\sqrt{500} > \sqrt{486}$;
d) $\sqrt{99} > \sqrt{92}$; *e)* $\sqrt{72} = \sqrt{72}$; *f)* $\sqrt{448} < \sqrt{450}$;
g) $\sqrt{2} = \sqrt{2}$; *h)* $\sqrt{\frac{15}{2}} < \sqrt{\frac{38}{5}}$; *i)* $\sqrt{\frac{7}{10}} > \sqrt{\frac{2}{3}}$;
j) $\sqrt{\frac{7}{3}} < \sqrt{\frac{12}{5}}$.

2106 *a)* 0; *b)* $6 \cdot \sqrt{3}$; *c)* 0; *d)* $\sqrt{2}$; *e)* $\sqrt{3}$; *f)* 1;
g) 2; *h)* 47; *i)* 17; *j)* $3 \cdot \sqrt{a}$; *k)* 0; *l)* $14 \cdot \sqrt{2x}$.

2107 *a)* $\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}$; *b)* $\frac{9 \cdot \sqrt{2}}{2}$; *c)* $4 \cdot \sqrt{3}$;
d) $3 \cdot \sqrt{7}$; *e)* $\frac{\sqrt{6}}{4}$; *f)* $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5}$;
g) $\frac{2 \cdot \sqrt{7}}{3}$; *h)* $\frac{13 \cdot \sqrt{10}}{30}$; *i)* $\frac{y \cdot \sqrt{x}}{x}$, $x > 0$;
j) $\frac{5 \cdot \sqrt{x}}{2}$, $x > 0$; *k)* $\frac{a \cdot \sqrt{y}}{3y}$, $y > 0$; *l)* $\frac{\sqrt{y}}{5}$, $y > 0$.

2108 *a)* $8 \cdot (\sqrt{5} - 2)$; *b)* $6 \cdot (\sqrt{3} + 1)$; *c)* $-5 \cdot (2 + \sqrt{7})$;
d) $2 \cdot (\sqrt{6} - 1)$; *e)* $2 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} + 1)$; *f)* $11 \cdot (3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{17})$;
g) $2 \cdot (4 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{3})$; *h)* $5 \cdot \sqrt{7} + 6 \cdot \sqrt{3}$; *i)* $19 + 6 \cdot \sqrt{10}$;
j) $\frac{5 \cdot (\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$, $x \ge 0$; *k)* $\frac{a \cdot (\sqrt{a} + 1)}{a - 1}$, $a \ge 0, a \ne 1$; *l)* $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y}$, $x, y > 0, x \ne y$.

2109 *a)* $2 - 3 \cdot \sqrt{2}$; *b)* $6 + \sqrt{3}$; *c)* $\frac{7 - \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5} - 5}{10}$;
d) 1; *e)* $5 + \sqrt{21}$; *f)* 34;
g) $-\frac{4}{11}$; *h)* $\frac{3 \cdot \sqrt{a} + 1}{a - 1}$, $a \ge 0, a \ne 1$; *i)* $\frac{2 \cdot \sqrt{x} - 6}{x - 1}$, $x \ge 0, x \ne 1$;
j) $\frac{5 - 3 \cdot \sqrt{y}}{y - 1}$, $y \ge 0, y \ne 1$.

2110 *a)* $\sqrt{5}$; *b)* $\sqrt{15}$; *c)* $\sqrt{\frac{1}{10}}$; *d)* $\sqrt{6}$; *e)* $\sqrt{x^3}$; *f)* $\sqrt{y^5}$;
g) $\sqrt{12a^5b}$; *h)* $\sqrt{ab}$; *i)* $\sqrt{b^3}$.

2111 A nevezőt gyöktelenítve:
a) $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$, ezért $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} < 2 \cdot \sqrt{6}$;
b) $\frac{7}{\sqrt{12} - \sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5}$, ezért $3 \cdot \sqrt{3} < \frac{7}{\sqrt{12} - \sqrt{5}}$.

2112 *a)* Gyöktelenítés után:

$$\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2\cdot(20-2\cdot\sqrt{84})}{4}=\frac{(10+2\cdot\sqrt{21})\cdot 2\cdot(10-\sqrt{84})}{4}=$$

$$=\frac{(10+\sqrt{84})\cdot(10-\sqrt{84})}{2}=\frac{100-84}{2}=\frac{16}{2}=8.$$

b) A nevező átalakításával:

$$\left(\frac{6}{\sqrt{5}+2}+\frac{2}{2\cdot(\sqrt{5}-2)}\right)\cdot(10+7\cdot\sqrt{5})=(7\cdot\sqrt{5}-10)\cdot(7\cdot\sqrt{5}+10)=49\cdot 5-100=145.$$

2113 A behelyettesítés előtt végezzünk átalakításokat:

a) $$\frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}=\frac{(\sqrt{x}+2)\cdot(\sqrt{x}-3)+(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+3)}{x-9}=\frac{2x-12}{x-9}=\frac{29}{22};$$

b) $$\frac{3\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}-5}+\frac{3\cdot\sqrt{x}-1}{5+2\cdot\sqrt{x}}=\frac{(3\cdot\sqrt{x}+1)\cdot(2\cdot\sqrt{x}+5)+(3\cdot\sqrt{x}-1)\cdot(2\cdot\sqrt{x}-5)}{4x-25}=$$

$$=\frac{12x+10}{4x-25}=-\frac{62}{121}.$$

2114 A bal oldali tört nevezőjét gyöktelenítsük:

$$\frac{125+51\cdot\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}=\frac{(125+51\cdot\sqrt{6})\cdot(5+\sqrt{6})}{25-6}=49+20\cdot\sqrt{6}.$$

A jobb oldalon levő nevezőt gyöktelenítés után emeljük négyzetre:

$$\left(\frac{1}{5-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2=(5+2\cdot\sqrt{6})^2=49+20\cdot\sqrt{6}.$$

2115 Mivel $\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{(2x-3)^2}=|2x-3|$, ezért:

a) $|2x-3|=2x-3$, ha $x\ge\frac{3}{2}$;

b) $|2x-3|=3-2x$ ha $x\le\frac{3}{2}$.

2116 *a)* A háromszög oldalai: $a=3$; $b=\sqrt{72}=6\cdot\sqrt{2}$; $c=9$ egység.

b) A két befogó $\sqrt{15}$ és $\sqrt{210}$ egység, az átfogó 15 egység.

c) A Pitagorasz-tétel alapján:

$$c^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x\cdot(2x+1)}\right)^2,$$

ahonnan:

$$c^2=4x^2+4x+1,$$
$$c^2=(2x+1)^2,$$
$$c=2x+1.$$

Mivel $x\in\mathbb{N}^+$, az átfogó hossza pozitív egész szám.

2117 *a)* Gyöktelenítsük a törtek nevezőit:

$$A=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+2;$$

$$B=\frac{\sqrt{20}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{20}-\sqrt{8})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}=2\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{10}-2\cdot\sqrt{6}+4.$$

Nézzük a két kifejezés különbségét:

$$A-B=-\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{10}+3\cdot\sqrt{6}-2=(3\cdot\sqrt{10}-\sqrt{15})+(3\cdot\sqrt{6}-2)>0.$$

Mert mindkét zárójelben pozitív szám áll.

Tehát $A>B$.

b) Egyszerűsítsünk:

$$A=5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3};$$

$$B=\frac{20-4\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{10-2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{(10-2\cdot\sqrt{6})\cdot\sqrt{2}}{2}=5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}.$$

Tehát $A=B$.

c) Hozzunk létre a gyökök alatt teljes négyzeteket:

$$A=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(4-2\cdot\sqrt{3})}=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}};$$

$$B=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(4+2\cdot\sqrt{3})}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}+1)^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

Tehát $A=B$.

2118 Vegyük észre a gyökök alatt a teljes négyzeteket:

$$\sqrt{35+2\cdot\sqrt{34}}-\sqrt{35-2\cdot\sqrt{34}}=\sqrt{(\sqrt{34}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{34}-1)^2}=$$
$$=|\sqrt{34}+1|-|\sqrt{34}-1|=2.$$

2119 *a)* Gyöktelenítsük a nevezőket:

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3},\quad \text{és}\quad b=2+\sqrt{3}.$$

Behelyettesítés:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{9-3}+\frac{3-\sqrt{3}}{9-3}=1.$$

b) Előbb a nevezők gyöktelenítésével hozzuk egyszerűbb alakra az eredeti kifejezést:

$$\frac{(1+a)\cdot(1-\sqrt{1+a})}{1-(1+a)}+\frac{(1-a)\cdot(1+\sqrt{1-a})}{1-(1-a)}=$$

$$=\frac{1+a-\sqrt{1+a}-a\cdot\sqrt{1+a}-1+a-\sqrt{1-a}+a\cdot\sqrt{1-a}}{-a}=$$

$$=\frac{-2a+a\cdot(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}}{a}. \qquad (1)$$

Mielőtt helyettesítenénk, számítsuk ki a két kritikus kifejezést:

$$\sqrt{1-a}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2};$$

$$\sqrt{1+a}=\ldots=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Ezeket az eredményeket írjuk be (1)-be:

$$\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.$$

2120 *a)* A törtek és gyökök miatt $a\neq 0,\ a\neq b,\ b>0.$

$$\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a^2\cdot b^5}}{a\cdot(b-a)^2\cdot\sqrt{b^3}}=\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-|a|\cdot b^2\cdot\sqrt{b}}{a\cdot(b-a)^2\cdot b\cdot\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{a^2-|a|\cdot b}{a\cdot(b-a)^2}=\begin{cases}\dfrac{a\cdot(a-b)}{a\cdot(b-a)^2}=\dfrac{1}{a-b}, & \text{ha}\quad a>0,\\[2ex] \dfrac{a\cdot(a+b)}{a\cdot(b-a)^2}=\dfrac{a+b}{(b-a)^2}, & \text{ha}\quad a<0.\end{cases}$$

b) A gyök miatt $a\geq 0$, a tört miatt $a-5\cdot\sqrt{a}+6\neq 0$. Helyettesítsünk: $x=\sqrt{a}$.

$$x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=$$
$$=x\cdot(x-2)-3\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x-3),$$

tehát $a\neq 4,\ a\neq 9.$

A számlálót is alakítsuk szorzattá:

$$x^2-x-2=x^2+x-2x+2=$$
$$=x\cdot(x+1)-2\cdot(x+1)=(x+1)\cdot(x-2).$$

Visszahelyettesítve az eredeti tört:

$$\frac{(\sqrt{a}+1)\cdot(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)\cdot(\sqrt{a}-3)}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-3}.$$

c) A gyökök és a törtek is értelmezhetők, ha $x>a^2$ és $a\neq 0$. A zárójelen belül hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}\right)^2}{x-(x-a^2)}-\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}\right)^2}{x-(x-a^2)}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\frac{x+x-a^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}-x-x+a^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}{a^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\frac{-4\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}{a^2}=-\frac{4x}{a^2}.$$

d) A gyökök és a törtek értelmezéséhez az kell, hogy $a \geq 0$, $b \geq 0$ és $a \neq b$ teljesüljön. Előbb a számlálóban hozzunk közös nevezőre, majd próbáljunk egyszerűsíteni.

$$\frac{\frac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{a\cdot b}}{a-b}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}-a\cdot\sqrt{b}-b\cdot\sqrt{a}}{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\cdot(a-b)-\sqrt{b}\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(a-b)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1.$$

2121 Az utolsó szorzatot írjuk át az $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ azonosság alapján:

$$2009\cdot 2011 = 2010^2 - 1.$$

Ezzel a kifejezés:

$$\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot\sqrt{1+2008\cdot 2010}}}.$$

Alkalmazzuk újra az előző módszert:

$$\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot\sqrt{1+2008\cdot 2010}}}=\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot 2009}}=$$

$$=\sqrt{1+2006\cdot 2008}=2007.$$

2122 *a)* Előbb a gyökök alatti kifejezéseket hozzuk egyszerűbb alakra:

$$x-3=\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}-3=\frac{a^4+8a^2+16}{4a^2}=\frac{(a^2+4)^2}{4a^2};$$

$$x-7=\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}-7=\frac{a^4-8a^2+16}{4a^2}=\frac{(a^2-4)^2}{4a^2}.$$

Ezek után helyettesítsünk:

$$f(a)=\sqrt{\frac{(a^2+4)^2}{4a^2}}+\sqrt{\frac{(a^2-4)^2}{4a^2}}=\frac{a^2+4}{2\cdot|a|}+\frac{|a^2-4|}{2\cdot|a|}.$$

A feltételek miatt $|a|=a$ és $|a^2-4|=4-a^2$,

$$f(a)=\frac{a^2+4}{2a}+\frac{4-a^2}{2a}=\frac{8}{2a}=\frac{4}{a}.$$

b) Kövessük az előbbi módszert:

$$1-\frac{a^2}{x^2}=1-\frac{a^2}{\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4b^2}}=1-\frac{4a^2\cdot b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{a^4+2a^2\cdot b^2+b^4-4a^2\cdot b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2},$$

ezt behelyettesítve:

$$g(x)=\frac{2b^2}{a^2+b^2}-\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}}=\frac{2b^2}{a^2+b^2}-\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}.$$

Ebből:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{3b^2-a^2}{a^2+b^2}, & \text{ha} \quad a\ge b,\\[2ex] \dfrac{2b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, & \text{ha} \quad b>a.\end{cases}$$

c) Előbb csak az (x^2-1)-et írjuk fel a-val:

$$x=\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}},$$

$$x^2-1=\frac{(a+1)^2}{4a}-1=\frac{a^2+2a+1-4a}{4a}=\frac{(a-1)^2}{4a}.$$

Gyöktelenítsük $h(x)$ nevezőjét:

$$h(x)=\frac{2\cdot\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{2\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-(x^2-1)}=2\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),$$

ebbe az alakba helyettesítsünk be:

$$h(x)=2\cdot\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4a}}\cdot\left(\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4a}}\right)=2\cdot\frac{|a-1|}{2\cdot\sqrt{a}}\cdot\left(\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\frac{|a-1|}{2\cdot\sqrt{a}}\right).$$

Ebből:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}\cdot\left(\dfrac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\dfrac{a-1}{2\cdot\sqrt{a}}\right)=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2a}{2\cdot\sqrt{a}}=a-1, & \text{ha} \quad a\ge 1,\\[2ex] \dfrac{1-a}{\sqrt{a}}\cdot\left(\dfrac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\dfrac{1-a}{2\cdot\sqrt{a}}\right)=\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2}{2\cdot\sqrt{a}}=\dfrac{1-a}{a}, & \text{ha} \quad 0<a<1.\end{cases}$$

2123 Vizsgáljuk meg a k-adik tagot:

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$

Az összeg tagjait átírva:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=9,$$

ugyanazok a tagok pozitív és negatív előjellel is megjelennek,

$$\sqrt{n}-1=9,$$
$$n=100.$$

2124 Alakítsuk át $f(x)$-et a számláló gyöktelenítésével:

$$f(x)=\sqrt{x^2+100}-\sqrt{x^2+1}=\frac{(x^2+100)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+100}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{99}{\sqrt{x^2+100}+\sqrt{x^2+1}}.$$

Az $f(x)$ függvény páros, mert $f(x)=f(-x)$.

Ha $x\ge 0$ a függvény szigorúan monoton csökken, maximuma van, ha $x=0$, ekkor $f(0)=9$.

Mivel $f(x)>0$, a lehetséges egész értékek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (ezeket két helyen veszi fel) és a 9.

Tehát összesen $8\cdot 2+1=17$ helyen vesz fel egész értéket.

Számok *n*-edik gyöke, a gyökvonás azonosságai – megoldások

2125 *a)* 3; *b)* –1; *c)* –2; *d)* –4;
e) 3; *f)* 5; *g)* 10; *h)* 7;
i) –7; *j)* 10; *k)* –100; *l)* 2;
m) 4; *n)* 2; *o)* –4; *p)* 8;
q) $-\frac{3}{4}$; *r)* $-\frac{2}{3}$; *s)* $-\frac{1}{10}=-0{,}1$; *t)* $\frac{1}{2}$;
u) 0,3; *v)* $\frac{5}{2}$; *w)* $\frac{2}{3}$.

2126 *a)* x; *b)* $|a|$; *c)* b; *d)* $-x$;
e) $|x|$; *f)* x^2; *g)* x^7; *h)* x^3;
i) x^4; *j)* a^2; *k)* $|x^5|$; *l)* $|x^5|$;
m) $-4x^5$; *n)* $27x^3$; *o)* $|x|$.

2127 *a)* 15; *b)* 6; *c)* 12; *d)* 15;
e) $2b$; *f)* $\frac{xy}{2}$; *g)* 2; *h)* $\frac{4}{3}$;
i) $2x$; *j)* $2xy\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{27}}$.

2128 *a)* 3; *b)* 4; *c)* 5; *d)* –2;
e) 2; *f)* 3; *g)* –2; *h)* –1.

2129 *a)* $\sqrt[3]{184}<\sqrt[3]{189}$; *b)* $\sqrt[3]{135}<\sqrt[3]{136}$; *c)* $\sqrt[3]{1377}>\sqrt[3]{1375}$; *d)* $\sqrt[4]{405}>\sqrt[4]{400}$;
e) $\sqrt[4]{1024}<\sqrt[4]{1053}$; *f)* $\sqrt[5]{3159}<\sqrt[5]{3168}$.

2130 *a)* 0; *b)* 0; *c)* 0; *d)* $5\cdot\sqrt[4]{2}$;
e) $4x\cdot\sqrt[3]{x}$; *f)* $4x\cdot\sqrt[4]{x^3}$; *g)* $6a\cdot\sqrt[5]{a}$; *h)* $6a^3\cdot\sqrt[3]{a}$.

2131 *a)* $\sqrt[12]{7^5}$; *b)* $\sqrt[12]{7^7}$; *c)* $\sqrt[10]{3^3}$; *d)* $\sqrt[8]{2^7}$;
e) $a\ge 0$, $\sqrt[6]{a^8}=\sqrt[3]{a^4}$; *f)* $b\in\mathbb{R}$, $\sqrt[9]{b^7}$; *g)* $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt[35]{x^{16}}$; *h)* $x\ge 0$, $\sqrt[12]{x^{10}}=\sqrt[6]{x^5}$;
i) $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt[75]{x^{54}}=\sqrt[25]{x^{18}}$; *j)* $x\ge 0$, $\sqrt[6]{x^{13}}$; *k)* $x>0$, $\sqrt[12]{\frac{1}{x}}$; *l)* $x>0$, $\sqrt[20]{x^{33}}$;
m) $x>0$, $\sqrt[60]{x^{31}}$.

2132 *a)* $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$; *b)* $2\cdot\sqrt[4]{3^3}$; *c)* $3\cdot\sqrt[5]{5^4}$; *d)* $5\cdot\sqrt[4]{3}$;
e) $5\cdot\sqrt[5]{5^3}$; *f)* $6\cdot\sqrt[6]{2^5}$; *g)* $\frac{5\cdot\sqrt[3]{a^2}}{3}$; *h)* $\frac{3\cdot\sqrt[3]{a}}{2}$;
i) $\frac{7\cdot\sqrt[5]{a^2}}{6a}$.

2133 *a)* $\sqrt[3]{2}$; *b)* $\sqrt{2}$; *c)* $\sqrt[3]{3}$; *d)* $\sqrt{10}$;
e) $\sqrt{2x^2y^9z^3}$; *f)* $\sqrt[5]{a^2b^3c^4}$; *g)* $\sqrt{2a^4b^6c^3}$.



2134 Egyrészt $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}$.

Alakítsunk ki közös gyökkitevőket:

$$\sqrt{2}=\sqrt[30]{2^{15}},\qquad \sqrt[3]{3}=\sqrt[30]{3^{10}},\qquad \sqrt[5]{5}=\sqrt[30]{5^{6}}.$$

Elég összehasonlítani a gyök alatti hatványokat:

$$5^6=25^3<32^3=2^{15}=8^5<9^5=3^{10}.$$

Tehát növekvő sorrendben:

$$\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}.$$

2135 *a)* Igaz.

b) Hamis, mert $\sqrt[4]{(-11)^4}=11$.

c) Hamis, mert $\sqrt[5]{a^{15}}=a^3$.

d) Hamis, mert $\sqrt[3]{(-a)^{12}}=(-a)^4=a^4$.

2136 A bal oldalon:

$$\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}+\sqrt{x^2}+\sqrt{4-4x+x^2}=\sqrt[3]{(x-1)^3}+\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-2)^2}=x-1+|x|+|x-2|.$$

a) $x-1+|x|+|x-2|=x+1$, ha $0\le x\le 2$.

b) $x-1+|x|+|x-2|=3x-3$, ha $x\ge 2$.

c) $x-1+|x|+|x-2|=1-x$, ha $x\le 0$.

2137 *a)* Értelmezés: $x\ne\pm1$. A gyökjel alá bevitel után használjuk fel, hogy $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2=\sqrt[3]{x^4}$.

$$\frac{x\cdot\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}+3\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x\cdot\sqrt[3]{x}-1}=\frac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}+3\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^4}-1}=\sqrt[3]{x^2}+1+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}+1}=\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)^2+3}{\sqrt[3]{x^2}+1}.$$

Egyszerűbb alakban:

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}+2\cdot\sqrt[3]{x^2}+4}{\sqrt[3]{x^2}+1}=\frac{x\cdot\sqrt[3]{x}+2\cdot\sqrt[3]{x^2}+4}{\sqrt[3]{x^2}+1}.$$

b) Értelmezés: $a-x>0$ és $a+x>0$.

A zárójelben lévő kifejezést hozzuk közös nevezőre:

$$\frac{a\cdot(a+x)-x\cdot(a-x)-2x^2}{\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}}=\frac{a^2-x^2}{\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}}=\frac{(a-x)\cdot(a+x)}{\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}}=\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}.$$

Az eredeti kifejezés:

$$\frac{\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}}{\sqrt[4]{(a-x)\cdot(a-x)\cdot(a+x)}}=\frac{\sqrt{(a-x)\cdot(a+x)}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt[4]{a+x}}=\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt[4]{a+x}}=\sqrt[4]{\frac{(a+x)^2}{(a+x)}}=\sqrt[4]{a+x}.$$

c) Értelmezés: $a\ge 0$; $x\ge 0$; $a\ne x$.

Első lépésben alakítsuk a zárójelben lévő törtet:

$$\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}=\frac{\sqrt[4]{a}\cdot\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{x^3}\right)}{\sqrt[4]{a}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{x}\right)}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{x}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{ax}+\sqrt[4]{x^2}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{x}}=\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{ax}+\sqrt[4]{x^2}.$$

Az első tört is egyszerűsíthető:

$$\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}=\sqrt{a}+\sqrt{x}.$$

Az eredetibe behelyettesítve:

$$\sqrt{a}+\sqrt{x}-\left(\sqrt[4]{a^2}-2\cdot\sqrt[4]{ax}+\sqrt[4]{x^2}\right)=2\cdot\sqrt[4]{ax}.$$

d) Értelmezés: $a \geq 0$; $b \geq 0$; $x \geq 0$; de a és x egyszerre nem lehet 0.

A zárójelben lévő törtet alakítsuk:

$$\frac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt[4]{bx}\cdot\left(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{a^2}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\sqrt[4]{bx}.$$

Ezt beírva, és elvégezve a négyzetre emelést:

$$\frac{4\cdot\sqrt{bx}+bx+3}{\sqrt{bx}+3}=\frac{\left(\sqrt{bx}+3\right)\cdot\left(\sqrt{bx}+1\right)}{\sqrt{bx}+3}=\sqrt{bx}+1.$$

2138 *a)* A gyök alatti kifejezéseket alakítsuk teljes négyzetté:

$$\sqrt[4]{17+12\cdot\sqrt{2}}-\sqrt[4]{17-12\cdot\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt[4]{\left(3-2\cdot\sqrt{2}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{3+2\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}.$$

Alkalmazzuk az előző módszert:

$$\sqrt{3+2\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=$$
$$=\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=2.$$

b) Legyen $\sqrt[4]{a+b\cdot\sqrt{c}}-\sqrt[4]{a-b\cdot\sqrt{c}}=x$ pozitív egész szám.

$$x^2=\sqrt{a+b\cdot\sqrt{c}}+\sqrt{a-b\cdot\sqrt{c}}-2\cdot\underbrace{\sqrt[4]{a^2-b^2c}}_{\text{a feltétel miatt 1}},$$
$$x^2+2=\sqrt{a+b\cdot\sqrt{c}}+\sqrt{a-b\cdot\sqrt{c}},$$
$$(x^2+2)^2=a+b\cdot\sqrt{c}+a-b\cdot\sqrt{c}+2\cdot\underbrace{\sqrt{a^2-b^2c}}_{\text{a feltétel miatt 1}},$$
$$(x^2+2)^2=2a+2.$$

Eredményünk szerint x páros szám.

Legyen $x=2k$, $x\in\mathbb{N}^+$.

$$(x^2+2)^2=(4k^2+2)^2=16k^4+16k^2+4=2a+2,$$

amiből:

$$a-1=8k^4+8k^2=8k^2\cdot(k^2+1).$$

Mivel k^2 és k^2+1 szomszédos számok, a szorzatuk páros, ezek szerint $16\,|\,a-1$.

Tehát az a szám 16-tal osztva 1-et ad maradékul.

Vegyes feladatok – megoldások

2139 *a)* Igaz.

b) Igaz.

c) Igaz.

d) Hamis, az 1-nél kisebb számok esetén nem.

e) Hamis, a –1-nél kisebb számok esetén nem.

f) Igaz.

g) Hamis: $\sqrt[18]{3^8}<\sqrt[18]{3^9}$.

h) Igaz.



2140 *a)* $a \in \mathbb{R}$; *b)* $b \geq 0$; *c)* $c \in \mathbb{R}$; *d)* $d \leq 0$; *e)* $x \geq 0$.

2141 *a)* $\sqrt[20]{5^5} > \sqrt[20]{4^4}$; *b)* $\sqrt[6]{2^2} < \sqrt[6]{3^3}$; *c)* $\sqrt[6]{2^9 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{2^9 \cdot 3^2}$.

2142 *a)* 33; *b)* 6; *c)* $1 + 4 \cdot \sqrt{15}$;
d) $6 \cdot \sqrt[3]{9}$; *e)* -1; *f)* 2;
g) $\sqrt[60]{\dfrac{1}{a}}$; *h)* $\sqrt[3]{x^4} - 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2x - 1$; *i)* $\dfrac{4 \cdot \sqrt{a}}{a-1}$.

2143 *a)* $\sqrt[6]{243}$; *b)* $\sqrt[6]{500}$; *c)* $\sqrt[30]{5^{31}}$;
d) $\sqrt[6]{\dfrac{2}{3}}$; *e)* $\sqrt[12]{\left(\dfrac{6}{5}\right)^5}$; *f)* $\sqrt[10]{54}$;
g) $\sqrt[6]{b}$; *h)* $\sqrt[12]{\dfrac{b^3}{a}}$.

2144 *a)* $5 + 5 \cdot \sqrt[6]{5} - 5 \cdot \sqrt[4]{5}$; *b)* $\sqrt[12]{2^{11}}$; *c)* $a - a \cdot \sqrt[6]{a} + a \cdot \sqrt[4]{a}$.

2145 Mivel $a = \dfrac{10}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = 2 \cdot \left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)$, behelyettesítve $a^2 - 4 \cdot \sqrt{7} \cdot a = -20$.

2146 Ha a befektetést b-vel, a hasznot h-val, az arányossági tenyezőt pedig q-val jelöljük:

$$h = q \cdot \sqrt[3]{b}.$$

a) Az $500 = q \cdot \sqrt[3]{1\,000\,000}$ egyenletből: $q = 5$.

b) $h = 5 \cdot \sqrt[3]{2\,000\,000} \approx 630$ Ft.

c) Az $1500 = 5 \cdot \sqrt[3]{b}$ egyenletből: $b = 300^3 = 27\,000\,000$ Ft.

2147 *a)* A fonálinga lengésideje $\dfrac{t_1}{t} = \dfrac{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{2l}{g}}}{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}}} = \sqrt{2}$-szeresére növekszik.

b) A fonálinga lengésideje $\dfrac{t_1}{t} = \dfrac{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{\frac{1}{3} \cdot l}{g}}}{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$-szorosára csökken.

c) Ha $t_1 = 3t$, akkor $\dfrac{3t}{t} = \dfrac{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l_1}{g}}}{2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{l}{g}}}$, amiből $3 = \sqrt{\dfrac{l_1}{l}}$, vagyis $l_1 = 9l$.

Tehát a fonálinga hosszát 9-szeresére kell növelnünk, ha a lengésidejét meg akarjuk háromszorozni.

2148 *a)* H tartalmazza az egész számokat, a kifejezés értéke a, ha $b = 0$.

b) Legyen $x = a + b \cdot \sqrt{2}$, $y = c + d \cdot \sqrt{2}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ekkor:

$$x + y = (a + c) + (b + d) \cdot \sqrt{2} \in H,$$

$$x \cdot y = (ac + 2bd) + (ad + bc) \cdot \sqrt{2} \in H.$$

c) A megadott szám eleme H-nak, mert:

$$\sqrt{27 - 10 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{25 - 10 \cdot \sqrt{2} + 2} = \sqrt{\left(5 - \sqrt{2}\right)^2} = |5 - \sqrt{2}| = 5 + (-1) \cdot \sqrt{2} \in H.$$

d) A szám reciproka:

$$\frac{1}{a + b \cdot \sqrt{2}} = \frac{a - b \cdot \sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2} \cdot \sqrt{2}.$$

Akkor kapunk egész számokat, ha a törtek nevezőinek értéke 1 vagy –1. Ennek megfelelő a és b értékek, például $a = 3$, $b = 2$ vagy $a = 7$, $b = 5$, természetesen ezek ellentettjei is megoldások:

$$\frac{1}{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} = 3 - 2 \cdot \sqrt{2}; \qquad \frac{1}{7 - 5 \cdot \sqrt{2}} = -7 - 5 \cdot \sqrt{2}.$$